

文章编号: 1000-7598 (2010) 03-0944-05

基于支持向量机-马尔可夫链的位移时序预测

徐 飞, 徐卫亚

(1. 河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210098; 2. 河海大学 岩土工程科学研究所, 南京 210098)

摘 要: 结合支持向量机和马尔可夫链, 提出了一种新的位移时序预测模型——支持向量机-马尔可夫链预测模型 (SVM-MC)。通过对实测位移值的学习, 利用经粒子群算法优化的支持向量机对位移时间序列的宏观发展趋势进行滚动预测; 在此基础上应用马尔可夫链确定位移时序的状态转移概率矩阵, 通过对状态的划分、实测值与支持向量机拟合值的绝对误差及相对误差等指标的分析, 实现了对预测结果的改进。将该模型应用到某工程永久船闸高边坡的位移时序预测中, 结果表明, 该模型具有科学可靠、预测精度高的优点, 在岩土体位移时序预测中具有有一定工程应用价值。

关 键 词: 支持向量机; 马尔可夫链; 位移时间序列; 粒子群优化

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

Prediction of displacement time series based on support vector machines-Markov chain

XU Fei, XU Wei-ya

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A new displacement time series predicting model was proposed by combining the support vector machines and Markov Chain, named as support vector machines-Markov chain (SVM-MC) model. Through studying the measured displacements, SVM optimized by particle swarm was used to dynamically forecast the trend of macro development. Markov chain was applied to compute state transition probability matrix. By classifying system state and calculating absolute error and relative error between measured values and SVM fitting values, the predicting results are improved. The model was used to predict displacement time series of a high slope of a permanent shiplock. The engineering case studies indicate that the model is scientific and reliable; and there is engineering practical value for displacement time series predicting.

Key words: support vector machines; Markov chain; displacement time series; particle swarm optimization

1 引 言

岩土体的位移由于受到内部因素(地质构造、岩层性质、岩体结构等)与外部因素(开挖、爆破、降雨等)的共同作用表现出一定的随机波动特征。对岩土体位移时序进行预测的工程意义在于能利用现场监测数据准确预报岩土体未来的形变, 进而反馈给原设计及时调整施工方案和采取紧急措施。目前用于位移时序预测的建模方法主要有时间序列分析方法和智能岩石力学方法, 如多项式回归、灰色理论、神经网络等。但这些方法存在着一定的缺陷, 如灰色拟合由于位移时序的随机波动性往往无法得

到合理的预测效果^[1], 而人工神经网络方法缺乏严格的理论基础, 对学习样本要求过高: 学习样本有限, 精度难以保证; 样本过多, 易陷入“维数灾难”, 泛化性能不高^[2]。

支持向量机(support vector machines, SVM)是一种基于结构风险最小化原理的机器学习技术, 能较好地解决小样本、非线性、高维数和局部极小点等实际问题。马尔可夫链(Markov chain, MC)适用于随机波动性较大的时间序列预测, 能够较好地揭示系统受多种复杂因素产生的随机性能。为了更加准确地获取位移时间序列的内在规律, 提高预测效果, 笔者尝试将上述两种算法相结合, 提出了位移

收稿日期: 2008-09-08

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(No. 50539110); 国家科技支撑计划(No. 2008BAB29B01); 国家科技支撑计划(No. 2006BAB04A02); 国家自然科学基金资助项目(No. 50909038)。

第一作者简介: 徐飞, 男, 1983年生, 博士生, 主要从事岩土工程安全监控及稳定评价方面的研究。E-mail: xfawy@hhu.edu.cn

时序预测的支持向量机-马尔可夫链预测模型 (SVM-MC): 利用基于粒子群算法 (Particle swarm optimization, PSO) 优化的SVM对岩土体位移监测数据进行学习和回归拟合, 滚动预测位移时序的宏观发展趋势; 在此基础上借助MC预测方法, 通过状态判别缩小预测区间来刻画位移时序的微观波动规律。本文在详细介绍SVM-MC的原理、算法后, 将其应用到某工程永久船闸边坡的位移时序预测中进行了实例检验。

2 支持向量机-马尔可夫链模型构建

2.1 支持向量机位移时序拟合

2.1.1 支持向量机回归基本原理^[3-4]

对于训练样本集 $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$, $x_i \in R^l$ 为输入变量, $y_i \in R$ 为输出值, l 和 n 分别为样本的维数和个数。SVM 回归的目标就是要寻求某一函数 $f(x)$, 使之通过训练, 对于样本之外的 x , 利用 $f(x)$ 能预测对应的 y 。

对于线性问题, SVM 通过对目标函数的极小化确定回归函数, 即

$$\min \Phi(w, \xi_i, \xi_i^*) = \frac{1}{2} |w|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*) \quad (1)$$

约束条件为

$$\begin{cases} y_i - wx_i - b \leq \varepsilon + \xi_i \\ wx_i + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ i = 1, 2, L, n \end{cases} \quad (2)$$

式中: 常数 $C > 0$ 表示了对超出误差 ε 的样本的惩罚程度; ε 为不敏感损失函数; $\xi_i, \xi_i^* > 0$ 为松弛因子。

将上述优化问题转化为对应的对偶问题, 结果如下

$$\begin{aligned} \max W(\alpha, \alpha^*) = & -\varepsilon \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^*) + \sum_{i=1}^n y_i (\alpha_i - \alpha_i^*) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*)(x_i x_j) \end{aligned} \quad (3)$$

约束条件为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\ 0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C, i = 1, 2, L, n \end{cases} \quad (4)$$

式中, α_i, α_i^* 为待求解的 l 维支持向量。

从而得到 SVM 回归模型:

$$f(x) = wx + b = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*)(x_i x) + b \quad (5)$$

对于非线性问题, 通过非线性映射 $x \rightarrow \phi(x)$ 将

原问题投影至某一高维特征空间中的线性问题上进行求解。因此, 非线性问题的 SVM 回归方程为

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_i x) + b \quad (6)$$

式中: $K(x_i x_j) = \phi(x_i) \phi(x_j)$ 为核函数, 常用的有多项式核、径向基核、多层感知器核等。本文选用了高斯径向基函数

$$K(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2 / \sigma^2) \quad (7)$$

SVM 的训练问题等价于解一个线性约束的二次规划问题, 其解唯一且全局最优。本文采用 SMO 算法来训练 SVM^[5]。

2.1.2 粒子群算法

粒子群算法^[6-8]是由 Kennedy 和 Eberhart 提出的一种群体智能算法。PSO 采用了位置-速度搜索模型, 每个粒子代表解空间的一个候选解, 定义一个适应值函数来衡量粒子的优劣程度。在 n 维解空间中, PSO 通过迭代计算来寻求最优解。设 $f_i = \{f_{i1}, f_{i2}, L, f_{in}\}$ 为粒子 i 所经历的最优位置, 即个体最优解; $g = \{g_1, g_2, L, g_n\}$ 为粒子群所经历最优位置, 即群体最优解。每次迭代, 粒子 i 通过动态跟踪 f_i 和 g 来完成其速度及位置的更新。

设 $x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, L, x_{in}\}$ 为粒子 i 的位置向量, $v_i = \{v_{i1}, v_{i2}, L, v_{in}\}$ 为粒子 i 的速度向量。PSO 的进化方程为

$$\begin{aligned} v_{ij}(t+1) = & \omega v_{ij}(t) + c_1 r_1 (f_{ij}(t) - \\ & x_{ij}(t)) + c_2 r_2 (g_{ij}(t) - x_{ij}(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t+1) \quad (9)$$

式中: t 为迭代次数; ω 为惯性权重系数; r_1, r_2 表示在(0,1)中的随机数; c_1, c_2 为加速度常数。

2.1.3 动态滚动预测

根据预测理论, 随着预测步数的增多, 误差急剧增大。为了充分利用最新的信息, 提高预测精度, 在利用 SVM 进行位移时序预测时采用滚动预测方法^[9]。其基本思想是, 假设要对时间序列 $\{x_t\}$ 进行预测, 最佳历史步数和预测步数分别为 s 和 p ; 滚动预测是利用 m 个已获取的时序 $\{x_0, x_1, L, x_{m-1}\}$ 的 $\{x_i, x_{i+1}, L, x_{i+s}\}$ ($i = 0, 1, L, m-s-1$) ($m-s$) 组时序预测 m 后的 $\{x_m, x_{m+1}, L, x_{m+p-1}\}$ p 个时序; 当获取后续 p 个时序的实测值后, 将其替代最前面的 $\{x_0, x_1, L, x_{p-1}\}$ p 个时序, 再进行下一次 p 个时序的预测, 依次类推。

在采用 SVM 建模时, 惩罚因子 C 和核函数参数 σ^2 选择的优劣直接影响到预测准确程度, 本文利

用 PSO 优化其参数。历史步数 s 、预测步数 p 及 (C, σ^2) 的优化过程如下^[10]:

(1) 选择不同的历史步数及预测步数组合, 分别建立学习样本和测试样本。

(2) 设置 PSO 的初始参数, 并确定待优化参数的取值范围。

(3) 采用粒子个体对应的 (C, σ^2) 分别建立 SVM 模型。计算各粒子的适应值, 并比较其适应值与自身最优适应值, 若优于后者, 则替换之。适应值函数如下:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - x_i^*|}{x_i} \quad (10)$$

式中: x_i 为第 i 个样本的实测值; x_i^* 为第 i 个样本的预测值; $i=1, 2, L, n$, n 为样本个数。

(4) 比较各粒子的适应值与群体最优适应值。若各粒子的适应值优于群体最优适应值, 则替换之。

(5) 判断算法的结束条件, 若满足则结束并输出结果, 否则按式 (8) 和式 (9) 更新粒子位置, 返回步骤 (3)。

(6) 利用各自的最优参数 (C, σ^2) 建立模型进行时序预测, 比较不同历史步数和预测步数的预测结果。

(7) 选择预测效果最好的历史步数和预测步数及参数组合进行建模预测。

2.2 预测结果的马尔可夫链改进

马尔可夫链预测^[11]是应用系统状态转移规律, 分析随机事件未来发展变化趋势及可能结果, 为决策者提供决策信息的一种分析方法。MC 预测的基本思路是根据系统状态之间的转移概率来揭示系统未来的发展趋势。

以位移实测值与 SVM 拟合结果的相对误差 Δ 所处的不同上下阈值作为状态划分标准, 将位移时间序列划分为若干种状态, 记为 S_1, S_2, L, S_n , n 为状态数。设位移时序中处于状态 S_i 的次数为 m_i , 由 S_i 经 k 步转移到 S_j 的次数为 $m_{ij}(k)$, 则位移时序由 S_i 经 k 步转移到 S_j 的概率为

$$P_{ij}^{(k)} = \frac{m_{ij}(k)}{m_i} (i, j=1, 2, L, n) \quad (11)$$

由于位移时序最后的状态转向不确定, 故 m_i 要去掉时序中最末的 k 个时序。

通过计算状态转移概率, 即可建立位移时序状态转移矩阵, 即

$$P(k) = \begin{bmatrix} P_{11}^{(k)} & P_{12}^{(k)} & L & P_{1n}^{(k)} \\ P_{21}^{(k)} & P_{22}^{(k)} & L & P_{2n}^{(k)} \\ M & M & M & M \\ P_{n1}^{(k)} & P_{n2}^{(k)} & L & P_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

在状态转移矩阵 $P(k)$ 建立后, 通过考察 $P(k)$ 即可预测系统未来的发展方向。预测时需先编制预测表, 表的编制方法是: 选取离预测时步最近的 N 个实测值 (一般取 $N=n$)^[12], 按离预测时步的远近, 转移步数分别定为 $1, 2, L, N$, 在转移步数所对应的转移矩阵中, 取起始状态所对应的行向量组成新的概率矩阵。对新的概率矩阵列向量求和, 其和最大的转移步数所对应的状态即为位移时序未来发展状态。

确定了位移时间序列未来转向, 也就确定了 SVM 预测值的变动区间, 认为最可能的预测值是该区间的中点。则最可能的位移时序预测值为

$$F(x) = (1 + \bar{\Delta})f(x) = (1 + \bar{\Delta}) \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_i, x) + b \right) \quad (13)$$

式中: $\bar{\Delta} = (\Delta_U + \Delta_D)/2$ 为平均相对误差, Δ_U, Δ_D 分别为某一变动区间的上下限; $F(x)$ 为经 MC 改进后的预测值; $f(x)$ 为 SVM 预测值。预测值的变动范围在 $(1 + \Delta_U)f(x) \sim (1 + \Delta_D)f(x)$ 之间。式 (13) 即为支持向量机-马尔可夫链模型 (SVM-MC)。

3 工程实例

某工程永久船闸为双线五级船闸, 在山体中深挖修建而成。该工程规模巨大, 技术复杂, 在船闸的南、北坡及中隔墩部位布置了大量的监测仪器来对边坡的变形进行实时监测。由于该船闸边坡的安全稳定性问题十分突出, 故做好船闸边坡的安全监控工作并进行预测预报具有重要的工程意义。运用本文的提出的方法对该船闸边坡的外观测点 TP/BM27GP02 从 1998 年 1 月 14 日至 2001 年 5 月 14 日的监测位移进行了预测分析。监测时间间隔基本上为 1 个月, 总计 41 个时步。

3.1 支持向量机位移时序拟合

PSO 算法中相关参数设置为: 粒子个数 20; ω 从 0.9 到 0.4 线性减小; $c_1 = c_2 = 2$; 算法停止条件为 $\varepsilon < 0.0001$ 或最大迭代次数 200。 C 的取值范围为 $[0, 100]$, σ^2 的取值范围为 $[0.1, 10]$ 。经过试算选取 $C=62.43$, $\sigma^2=7.98$, $s=10$, $p=1$, 取前 37 个时步构造了 27 个学习样本, 将最后 4 个时步作为检验样本。表 1 列出了 27 个学习样本的位移实测值、

SVM 拟合值、绝对误差、相对误差。

表 1 位移时序监测值及支持向量机模型拟合值

Table 1 Measured and fitting values of SVM

时步	实测值 /mm	SVM 拟合值 /mm	绝对误差 /mm	相对误差 /%	所处 状态
11	15.39	15.64	-0.25	-1.62	S2
12	19.19	18.65	0.54	2.81	S4
13	18.69	18.78	-0.09	-0.48	S2
14	21.69	22.71	-1.02	-4.70	S1
15	23.69	24.32	-0.63	-2.66	S1
16	25.76	26.42	-0.66	-2.56	S1
17	28.39	27.68	0.71	2.50	S4
18	28.69	28.52	0.17	0.59	S3
19	29.92	29.45	0.47	1.57	S3
20	30.33	29.42	0.91	3.00	S4
21	30.51	30.15	0.36	1.18	S3
22	31.70	31.03	0.67	2.11	S4
23	32.21	31.52	0.69	2.14	S4
24	31.28	31.12	0.16	0.51	S3
25	29.97	29.14	0.83	2.77	S4
26	31.08	30.99	0.09	0.29	S3
27	31.48	31.54	-0.06	-0.19	S2
28	33.25	33.05	0.20	0.60	S3
29	32.50	32.98	-0.48	-1.48	S2
30	32.63	32.74	-0.11	-0.34	S2
31	32.46	32.25	0.21	0.65	S3
32	34.09	34.92	1.17	3.43	S4
33	33.33	33.65	-0.32	-0.96	S2
34	33.97	34.02	-0.05	-0.15	S2
35	34.76	34.25	0.51	1.47	S3
36	34.76	34.99	-0.23	-0.66	S2
37	32.90	35.02	-2.12	-6.44	S1

3.2 位移时序的马尔可夫链改进

(1) 状态划分

依据位移实测值与 SVM 拟合值的相对误差 Δ 划分状态，考虑到计算上的方便将位移时序划分为 4 个状态（表 2）。根据表 2 划分学习样本所处的状态，划分结果见表 1。

表 2 状态划分标准

Table 2 State division standard

状态编号	状态数值界限/%
S1	[-8, -2)
S2	[-2, 0)
S3	[0, 2)
S4	[2, 8]

(2) 计算状态转移概率矩阵

根据表 1，可确定在各状态 S_j 经过 k 步转移到 S_j 的次数为 $m_{ij}(k)$ ，同时还可以确定 S_i 出现的次数 m_i 。根据式 (12) 确定状态转移矩阵为

$$P(1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}, P(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 编制预测表

由于将状态划分为 4 个，所以选取离预测时步最近的 4 个时步编制预测表，按离预测时步的远近，转移步数分别定为 1、2、3、4。在转移步数所对应的转移矩阵中，选取起始状态的行向量组成新的概率矩阵。对新的概率矩阵列向量求和，其和最大的转移步数所对应的状态即为系统的未来转向状态。表 3 为第 38 个时步所处状态的计算结果。由表 3 可知，在合计栏中状态 S1 和 S2 出现的可能性最大且接近相等，表示第 38 个时步的实测值与预测值的误差最可能处在由状态 S1 和 S2 构成的区间中。故取 S1 和 S2 构成的区间的的中点误差为预测值的可能误差。根据式 (13) 得

$$F(x) = (1 + \bar{\Delta})f(x) = (1 + (-8)\%) \times 35.95 = 34.512$$

此时实测值为 34.60 mm，采用 SVM 模型的预测值为 35.95 mm，基于 SVM-MC 有效地提高了预测的精度。

表 3 第 38 个时步的状态预测计算表

Table 3 Table of state forecasting of the 38th time step

时步	初始 状态	转移 步数	状态编号			
			S1	S2	S3	S4
37	S1	1	0.667	0	0	0.333
36	S2	2	0.143	0.428	0.286	0.143
35	S3	3	0	0.428	0.428	0.144
34	S2	4	0.333	0.333	0.167	0.167
合计			1.143	1.189	0.881	0.787

(4) 位移时序动态滚动预测

当获得第 38 个时步的实测值后，删去第 1 个时步的数据，增补第 38 个时步的数据，形成定长的学习样本，保证了每次预测都使用最新的观测数据。依此，基于 SVM-MC 对第 39~41 时步进行了动态滚动预测，计算结果见表 4。由表可知，SVM-MC 预测值与实测值吻合较好，误差较小，预测精度较 SVM 有了较大提高。

表 4 位移时序实测值与预测值的比较

Table 4 Comparison between measured value and predicted value of displacements

序号	实测值 /mm	SVM 预测值 /mm	SVM 相对误差 /%	SVM-MC 预测值 /mm	SVM-MC 相对误差 /%
38	34.60	35.95	-3.902	34.52	0.254
39	35.78	36.98	-3.354	35.50	0.783
40	34.53	36.86	-6.748	34.87	-0.985
41	33.99	37.04	-8.973	35.02	-3.030

4 结 语

结合支持向量机和马尔可夫链两种预测方法,提出了位移时序预测的支持向量机-马尔可夫链预测模型(SVM-MC)。SVM-MC 兼有支持向量机预测和马尔可夫链转移概率预测的优点。采用支持向量机预测位移时序的宏观发展规律,再用马尔可夫链状态转移概率刻画位移时序的微观波动规律,从而提高了位移时序预测的精度。工程实例表明,该模型是切实可行的,预测精度较单一的支持向量机模型有了较大提高,在位移时序分析中有一定的推广价值。

参 考 文 献

- [1] 陈继光, 祝令德. 基于神经网络的马尔可夫预测模型[J]. 计算机工程与应用, 2006, (6): 225—226, 232.
CHEN Ji-guang, ZHU Ling-de. Markov model for the deformation forecast based on artificial neural network[J]. **Computer Engineering and Application**, 2006, (6): 225—226, 232.
- [2] 刘开云, 乔春生, 滕文彦. 边坡位移非线性时间序列采用支持向量机算法的智能建模与预测研究[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(1): 57—61.
LIU Kai-yun, QIAO Chun-sheng, TENG Wen-yan. Research on non-linear time sequence intelligent model construction and prediction of slope displacement by using support vector machine algorithm[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2004, 26(1): 57—61.
- [3] VAPNIK V N. The nature of statistical learning theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [4] 边肇祺, 张学工. 模式识别(第二版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [5] PLATT J C. Sequential minimal optimization: A fast algorithm for training support vector machines[R]. Cambridge: MIT Press, 1998.
- [6] 段晓东, 王存睿, 刘向东. 粒子群算法及其应用[M]. 沈阳: 辽宁大学出版社, 2007.
- [7] 徐飞, 徐卫亚, 刘康, 等. 岩石力学性态预测的 PSO-SVM 模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(增 2): 3699—3704.
XU Fei, XU Wei-ya, LIU Kang, et al. Forecasting of rock mechanical behaviors based on PSO-SVM model[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(Supp.2): 3699—3704.
- [8] 梁桂兰, 徐卫亚, 何育智, 等. PSO-RBFNN 模型及其在岩土工程非线性时间序列预测中的应用[J]. 岩土力学, 2008, 29(2): 995—1000.
LIANG Gui-lan, XU Wei-ya, HE Yu-zhi, et al. Study and application of PSO-RBFNN model to nonlinear time series forecasting for geotechnical engineering[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(2): 995—1000.
- [9] 姜谏男. 基于 PSO-SVM 非线性时序模型的隧洞围岩变形预报[J]. 岩土力学, 2007, 28(6): 1176—1180.
JIANG An-nan. Forecasting nonlinear time series of surrounding rock deformations of underground cavern based on PSO-SVM[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(6): 1176—1180.
- [10] 徐卫亚, 徐飞, 刘大文. 位移时序预测的 APSO-WLSSVM 模型及应用研究[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(3): 313—318.
XU Wei-ya, XU Fei, LIU Da-wen. Study and application of displacement time series forecast based on APSO-WLSSVM[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(3): 313—318.
- [11] 柳金甫, 李学伟. 应用随机过程[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2000.
- [12] 张福民, 崔桂林. 基于灰色马尔可夫链的深基坑沉降预测[J]. 土工基础, 2006, 20(4): 82—84, 93.
ZHANG Fu-min, CUI Gui-lin. The settlement prediction of foundation pit based on gray Markov chain model[J]. **Soil Engineering and Foundation**, 2006, 20(4): 82—84, 93.